Тема: «Основные методы решения уравнений высших степеней»

1. Уравнение вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$,
(1)
где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ – заданные числа, а x – неизвестное, называется рациональным уравнением.

Основные методы решения уравнений вида (1) высших степеней (n≥3) – разложение на множители и замена переменной.

2. Разложить левую часть уравнения $P_n(x) = 0$ - это, значит, представить его в виде произведения двух или нескольких множителей.

а) Вынесение общего множителя.

Пример:

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 0.$$
$$x(x^2 - 3x + 4) = 0$$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x^2 - 3x + 4 = 0$

Решений нет, так как $D < 0$.

Ответ: 0.

б) Выделение полного квадрата.

Пример:

$$x^4 + 6x^2 - 10 = 0.$$
$$(x^2)^2 + 2x^2 \cdot 3 + 3^2 - 9 - 10 = 0.$$
$$(x^2 + 3)^2 - (\sqrt{19})^2 = 0.$$
$$(x^2 + 3 - \sqrt{19)}(x^2 + 3 + \sqrt{19}) = 0.$$

$x^2 + 3 - \sqrt{19} = 0.$ $\qquad\qquad$ $x^2 + 3 + \sqrt{19} = 0.$

$x^2 = \sqrt{19} - 3 > 0, \text{т. к.} \sqrt{19} > 3$ $\qquad\qquad$ $x^2 = -3 - \sqrt{19} < 0.$

$x = \pm\sqrt{\sqrt{19} - 3}.$ $\qquad\qquad$ Корней нет.

Данное биквадратное уравнение можно было бы также решить подстановкой $x^2 = t \geq 0$.

3. Группировка.

Применяется в сочетании со способом вынесения за скобки общего множителя.

Пример:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0.$$
$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0.$$
$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

$x = -1$ $\qquad$ $x = 2$ $\qquad$ $x = -2$

Ответ: -1; 2; -2.

4. Подбор корня по старшему и свободному коэффициенту.

При решении уравнений высших степеней вида (1) рациональные корни уравнений $P_n(x) = 0$ ищем в виде $\frac{p}{q}$, где p – делитель a_0, q – делитель a_n, p и q взаимно просты, $p \in Z, q \in N$.

Применяем теорему Безу:

Если число α является корнем многочлена $P_n(x)$ из (1), имеющего степень n, то этот многочлен можно представить в виде $P_n(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ - частное от деления $P(x)$ на $x - \alpha$, многочлен степени n-1.

Пример:

$x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$

Ищем корень среди делителей числа 6, т.к. $a_n = a_3 = 1$: ±1; ±2; ±3; ±6.

Находим x=3. Выполняя деление уголком, разложим данный многочлен на множители. Тогда $x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x-3)(x^2 + 2x - 2) = 0$.

$x_1 = 3$ $\qquad\qquad$ $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$

Ответ: 3; $-1 \pm \sqrt{3}$.

5. Введение новой переменной.

Находим в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначаем новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения.

$$(x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$$
$$(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x = t$$
$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$t_1 = 4$

$x^2 - 2x = 4$

$x^2 - 2x - 4 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 * (-4) = 4 + 16 = 20$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{5}$

$t_2 = -1$

$x^2 - 2x = -1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$

Ответ: $1 \pm \sqrt{5}$; 1.

В некоторых уравнениях «удобную» подстановку желательно знать заранее.

Рассмотрим несколько случаев:

5.1. Однородное уравнение:

$Ay^{2n} + By^n z^n + Cz^{2n} = 0$, где A, B, C – числа, отличные от нуля; $n \in N$;

y = y(x) и z = z(x) – некоторые функции от x;

1) Возможен случай $\begin{cases} z(x) = 0, \\ y(x) = 0. \end{cases}$
2) Делим обе части уравнения на $z^{2n} \neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно t, где $t = (\frac{y}{z})^n$.

$At^2 + Bt + C = 0$.

Пример:

$3(x^2 - x + 1)^2 - 5(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)^2 = 0$.

Разделим обе части уравнения на $(x^2 - x + 1)^2 \neq 0$:

$$3 - 5\frac{x+1}{x^2 - x + 1} - 2\left(\frac{x+1}{x^2 - x + 1}\right)^2 = 0.$$

Пусть $\frac{x+1}{x^2 - x + 1} = t$, тогда $3 - 5t - 2t^2 = 0$.

$t_1 = -3$,

$\frac{x+1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}$

$x^2 - 3x - 1 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$t_2 = \frac{1}{2}$.

$\frac{x+1}{x^2 - x + 1} = -3$

$3x^2 - 2x + 4 = 0$

нет корней, т.к. $D < 0$.

Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

5.2. Симметричное уравнение (коэффициенты членов, равностоящих от концов, равны):

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

Если n – четное, то подстановка $x + \frac{1}{x} = t$; $|t| \geq 1$.

Если n – нечетное, то x=-1 – всегда корень уравнения.

Примеры:

а) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Группируем $(2x^4 + 2) + (3x^3 + 3x) - 16x^2 = 0$, делим на $x^2 \neq 0$,

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Получаем уравнение: $2(t^2-2)+3t-16=0.$

$$2t^2+3t-20=0.$$

$t_1=-4$ | $t_2=\frac{5}{2}$

$x+\frac{1}{x}=-4$ | $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$x^2+4x+1=0$ | $2x^2-5x+2=0$

$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$ | $x_3=2$ | $x_4=\frac{1}{2}$

Ответ: $-2\pm\sqrt{3}$; 2; $\frac{1}{2}$.

б) $3x^3+5x^2+5x+3=0.$

$x=-1$ – корень уравнения.

$$3x^3+3+5x^2+5x=0.$$
$$3(x+1)(x^2-x+1)+5x(x+1)=0.$$
$$(x+1)(3x^2-3x+3+5x)=0.$$

$x=-1$ | $3x^2+2x+3=0$

$D=4-4\cdot3\cdot3<0.$

Решений нет.

Ответ: -1.

5.3. Уравнение $(\mathbf{x}+\boldsymbol{a})^4+(\mathbf{x}+\mathbf{b})^4=\mathbf{c}$, где a, b, c - действительные числа, сводится к биквадратному, если сделать подстановку $t=\frac{x+a+x+b}{2}$.

Пример: $(x-1)^4+(x+3)^4=82.$

Пусть $t=\frac{x-1+x+3}{2}$, тогда $x=t-1.$

$$(t-2)^4+(t+2)^4=82.$$

Применяем формулу $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ (полезно вспомнить бином Ньютона), получаем:

$$2t^4+48t^2+2\cdot16=82.$$
$$t^2+24t^2-25=0.$$

$t^2=-25.$ | $t^2=1$

Решений нет. | $t=\pm1$

Находим $x=t-1$,

при $t=1$ | при $t=-1$

$x=1-1$ | $x=-1-1$

$x=0$ | $x=-2$

Ответ: 0; -2.

5.4. Уравнение вида $(\mathbf{x}+\mathbf{a})(\mathbf{x}+\mathbf{b})(\mathbf{x}+\mathbf{c})(\mathbf{x}+\mathbf{d})=\boldsymbol{l}$ сводится к квадратному, если $a+b=c+d$.

Пример:

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10.$$
$$1+5=2+4$$
$$[(x+1)(x+5)][(x+2)(x+4)]=10.$$
$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=10.$$

Пусть $x^2+6x+5=t.$

$$t(t+3)-10=0.$$
$$t^2+3t-10=0.$$

$t_1=-5$ | $t_2=2$

$x^2+6x+5=-5$ | $x^2+6x+5=2$

$x^2+6x+10=0$ | $x^2+6x+3=0$

$D<0$ | $D=36-4\cdot3=24$

Решений нет. $x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$x = -3 + \sqrt{6}$

$x = -3 - \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6} - 3; -\sqrt{6} - 3$.

5.5. Уравнения вида $\mathbf{(ax^2 + bx + c)(ax^2 + dx + c) = Ax^2}$, где $c \neq 0, A \neq 0$ сводится к квадратному следующим образом:

1. Разделим на $x^2 \neq 0$ обе части уравнения: $\left(ax + \frac{c}{x} + b\right)\left(ax + \frac{c}{x} + d\right) - A = 0$.

2. Делаем замену $ax + \frac{c}{x} = t$, получаем квадратное уравнение $(t + b)(t + d) - A = 0$, из которого находим t, а затем x.

Пример:

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2, x \neq 0.$$

$$\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x^2 + \frac{2}{x} + 2\right) = 2$$

Пусть $x + \frac{2}{x} + 1 = t$

$$t(t + 1) = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$t_1 = 1$

$x + \frac{2}{x} + 1 = 1$

$\frac{x^2+2}{x} = 0$

Решений нет.

$t_2 = -2$

$x + \frac{2}{x} + 1 = -2$

$\frac{x^2+3x+2}{x} = 0$

$x_1 = -1, \ x_2 = -2$

Ответ: -1; -2.

5.6.Уравнение вида $\boldsymbol{(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = Ax^2}$, где a, b, c, d и A такие, что $a \cdot b = c \cdot d \neq 0$ сводится к квадратному; надо перемножить скобки, содержащие a и b, затем перемножить скобки, содержащие c и d, разделить обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и, сделав подстановку, можно свести к квадратному уравнению.

Пример:

$$(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$$

$$3 \cdot 8 = 2 \cdot 12$$

$$[(x + 3)(x + 8)][(x + 2)(x + 12)] = 4x^2$$

$$(x^2 + 11x + 24)(x^2 + 14x + 24) = 4x^2, x \neq 0; \div x^2 \neq 0$$

$$\left(x + \frac{24}{x} + 11\right)\left(x + \frac{24}{x} + 14\right) = 4$$

Пусть $x + \frac{24}{x} + 11 = t$

$$t(t + 3) = 4$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$t_1 = -4$

$x + \frac{24}{x} + 11 = -4$

$x + \frac{24}{x} + 15 = 0$

$x^2 + 15x + 24 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$

$t_2 = 1$

$x + \frac{24}{x} + 11 = 1$

$x + \frac{24}{x} + 10 = 0$

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$x_1 = -4, \ x_2 = -6$

Ответ: -4; -6; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$.

5.7. Иногда полезно использовать основное свойство дроби, т.е. поделить числитель и знаменатель на $x \neq 0$ и затем вводить подстановку. **Уравнение вида** $\mathbf{\frac{Ax}{ax^2+bx+c} + \frac{Bx}{ax^2+dx+c} = D}$ можно упростить, разделив числитель и знаменатель дроби на $x \neq 0$.

Пример: $\frac{13x}{2x^2+x+3}+\frac{2x}{2x^2-5x+3}=6; x=0$ - решением не является, поэтому поделим на $x\neq 0$:

$$\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}+\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}=6$$

Пусть $2x+\frac{3}{x}=t$

$$\frac{13}{1+t}+\frac{2}{t-5}=6$$

$$2t^2-13t+11=0$$

$t_1=1$ $\quad$ $t_2=\frac{11}{2}$

Следовательно,

$2x+\frac{3}{x}=1$

$2x^2-x+3=0$

Решений нет

$2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2}$

$4x^2-11x+6=0$

$x_1=2$ $\quad$ $x_2=\frac{3}{4}$

Ответ: 2; $\frac{3}{4}$.

5.8. Использование формулы $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$.

$$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$$

$$\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{9x}{9+x}=40$$

$$\left(\frac{9x+x^2-9x}{9+x}\right)^2+2\cdot\frac{9x^2}{9+x}-40=0$$

$t=\frac{x^2}{9+x}$

$t^2+18t-40=0$

$t_1=-20$

$\frac{x^2}{9+x}=-20$

$x^2+20x+180=0$

Нет решений.

$t_2=2$

$\frac{x^2}{9+x}=2$

$x^2-x-18=0$

$x=1\pm\sqrt{19}$

Ответ: $1\pm\sqrt{19}$.

5.9. При решении уравнений можно использовать свойства входящих в них функций, а именно, использовать ОДЗ, ограниченность функции на некотором множестве, свойства монотонности.

Более подробно на сайте http://festival.1september.ru/articles/313979/ (Митрохина О.Н. Тема урока: "Решение уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций". 11-й класс (2005 / 2006 учебный год).

Список литературы

1. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре // М.: Просвещение, 1997.
2. Кравцев С.В., Макаров Ю.Н. Методы решения задач по алгебре для школьников и абитуриентов // М.: «Экзамен», 2003.
3. Мерзляк А.Г. Алгебраический тренажер //М.: «Илекса», 2003.
4. Олехник С.Н. Алгебра и начала анализа //М.: Экзамен, 2003.
5. Письменный Д. Готовимся к экзамену по математике // М.: Айрис Пресс Рольф, 1999.