Тема: «Уравнения с двумя переменными»
(Неопределенные уравнения)

Обращение автора к данной теме не является случайным. Уравнения с двумя переменными впервые встречаются в курсе 7 класса. Одно уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений. Это наглядно демонстрирует график линейной функции, заданный в виде ax + by=c. В школьном курсе учащиеся изучают системы двух уравнений с двумя переменными. В результате из поля зрения учителя и, поэтому ученика, выпадает целый ряд задач, с ограниченными условиями на коэффициент уравнения, а также методы их решения.

Речь идет о решении уравнения с двумя неизвестными в целых или натуральных числах. В школе натуральные и целые числа изучаются в 4-6 классах. К моменту окончания школы не все ученики помнят различия между множествами этих чисел.

Однако задача типа «решить уравнение вида ax + by=c в целых числах» все чаще встречается на вступительных экзаменах в ВУЗы и в материалах ЕГЭ.

Решение неопределенных уравнений развивает логическое мышление, сообразительность, внимание анализировать.

Я предлагаю разработку нескольких уроков по данной теме. У меня нет однозначных рекомендаций по срокам проведения этих уроков. Отдельные элементы можно использовать и в 7 классе (для сильного класса). Данные уроки можно взять за основу и разработать небольшой элективный курс по предпрофильной подготовке в 9 кл. И, конечно, этот материал можно использовать в 10-11 классах для подготовки к экзаменам.

Цель урока:

- повторение и обобщение знаний по теме «Уравнения первого и второго порядка»
- воспитание познавательного интереса к учебному предмету
- формирование умений анализировать, проводить обобщения, переносить знания в новую ситуацию

Урок 1.
Ход урока.

1) Орг.момент.

2) Актуализация опорных знаний.

Определение. Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида mx + ny = k, где m, n, k – числа, x, y – переменные.
Пример: 5x+2y=10

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Уравнения с двумя переменными, имеющими одни и те же решения, называются равносильными.

(1) $5x+2y=12 \Leftrightarrow$ (2) $y = -2.5x+6$

Данное уравнение может иметь сколько угодно решений. Для этого достаточно взять любое значение x и найти соответствующее ему значение y.

Пусть $x = 2$, $y = -2.5\cdot2+6 = 1$

$x = 4$, $y = -2.5\cdot4+6 =- 4$

Пары чисел (2;1); (4;-4) – решения уравнения (1).

Данное уравнение имеет бесконечно много решений.

3) Историческая справка

Неопределенные (диофантовы) уравнения – это уравнения, содержащие более одной переменной.

В III в. н.э. – Диофант Александрийский написал «Арифметику», в которой расширил множество чисел до рациональных, ввел алгебраическую символику.

Так же Диофант рассмотрел проблемы решения неопределенных уравнений и им даны методы решения неопределенных уравнений второй и третьей степени.

4) Изучение нового материала.

Определение: Неоднородным диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y называется уравнение вида mx + ny = k, где m, n, k, x, y € Z k≠0

Утверждение 1.

Если свободный член k в уравнении (1) не делится на наибольший общий делитель (НОД) чисел m и n, то уравнение (1) не имеет целых решений.

Пример: 34x – 17y = 3.

НОД (34; 17) = 17, 3 не делится нацело на 17, в целых числах решения нет.

Пусть k делится на НОД (m, n). Делением всех коэффициентов можно добиться, что m и n станут взаимно простыми.

Утверждение 2.

Если m и n уравнения (1) взаимно простые числа, то это уравнение имеет по крайней мере одно решение.

Утверждение 3.

Если коэффициенты m и n уравнения (1) являются взаимно простыми числами, то это уравнение имеет бесконечно много решений:

$\begin{cases} x = x_1 + nt, \\ y = y_1 - mt \end{cases}$ где $(x_1;\ y_1)$ – какое-либо решение уравнения (1), t €Z

Определение. Однородным диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y называется уравнение вида mx + ny = 0, где (2)
m, n, x, y €Z

Утверждение 4.

Если m и n – взаимно простые числа, то всякое решение уравнения (2) имеет вид

$\begin{cases} x = nk, \\ y = -mk, k \in Z \end{cases}$

5) Домашнее задание. Решить уравнение в целых числах:

1) 9x – 18y = 5
2) x + y= xy
3) Несколько детей собирали яблоки. Каждый мальчик собрал по 21 кг, а девочка по 15 кг. Всего они собрали 174 кг. Сколько мальчиков и сколько девочек собирали яблоки?
   Замечание. На данном уроке не представлены примеры решения уравнений в целых числах. Поэтому домашнее задание дети решают исходя из утверждения 1 и подбором.

Урок 2.

1) Организационный момент

2) Проверка домашнего задания

1) $9x - 18y = 5$
НОД (9;18)=9
5 не делится нацело на 9, в целых числах решений нет.
2) $x + y = xy$
Методом подбора можно найти решение
Ответ: (0;0), (2;2)
3) Составим уравнение:
Пусть мальчиков x, x €Z, а девочек y, y €Z, то можно составить уравнение $21x + 15y = 174$
Многие учащиеся, составив уравнение, не смогут его решить.
Ответ: мальчиков 4, девочек 6.

3) Изучение нового материала

Столкнувшись с трудностями при выполнении домашнего задания, учащиеся убедились в необходимости изучения их методов решений неопределенных уравнений. Рассмотрим некоторые из них.

I. Метод рассмотрения остатков от деления.

<u>Пример.</u> Решить уравнение в целых числах $3x - 4y = 1$/
$3x = 4y + 1$.
Левая часть уравнения делится на 3, следовательно, должна делиться и правая часть. Рассмотрим три случая.

1) Если $y = 3m$, m €Z, то $4y + 1 = 4\cdot 3m + 1 = 12m + 1$ не делится на 3.
2) Если $y = 3m + 1$, то $4y + 1 = 4\cdot (3m + 1) + 1 = 12m + 5$ не делится на 3.
3) Если $y = 3m + 2$, то $4y + 1 = 4\cdot (3m + 2) + 1 = 12m + 9$ делится на 3, поэтому $3x = 12m + 9$, следовательно, $x = 4m + 3$, а $y = 3m + 2$.

Ответ: $\begin{cases} x = 4m + 3, \\ y = 3m + 2 \end{cases}$ где m €Z.

Описанный метод удобно применять в случае, если числа m и n не малы, но зато разлагаются на простые сомножители.

<u>Пример:</u> Решить уравнения в целых числах.

$8x + 14y = 32$
$4x + 7y = 16$
$4x = 16 - 7y$

Пусть $y = 4n$, тогда $16 - 7y = 16 - 7\cdot 4n = 16 - 28n = 4*(4-7n)$ делится на 4.
$y = 4n+1$, тогда $16 - 7y = 16 - 7\cdot (4n + 1) = 16 - 28n - 7 = 9 - 28n$ не делится на 4.
$y = 4n+2$, тогда $16 - 7y = 16 - 7\cdot (4n + 2) = 16 - 28n - 14 = 2 - 28n$ не делится на 4.
$y = 4n+3$, тогда $16 - 7y = 16 - 7\cdot (4n + 3) = 16 - 28n - 21 = -5 - 28n$ не делится на 4.
Следовательно, $y = 4n$, тогда
$4x = 16 - 7\cdot 4n = 16 - 28n$, $x = 4 - 7n$

Ответ: $\begin{cases} x = 4 - 7n \\ y = 4n \end{cases}$, где n €Z.

II. Неопределенные уравнения 2-ой степени

Сегодня на уроке мы лишь коснемся решения диофантовых уравнений второго порядка.

И из всех типов уравнений рассмотрим случай, когда можно применить формулу разности квадратов или другой способ разложения на множители.

Пример: Решить уравнение в целых числах.

$x^2 - 4y^2 = 13$

$(x-2y)(x+2y) = 13$

13 – простое число, поэтому оно может быть разложено на множители лишь четырьмя способами: 13 = 13·1 = 1·13 = (-1)(-13) = (-13)(-1)

Рассмотрим эти случаи

а) $\begin{cases} x-2y=-13, \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=7 \\ y_1=-3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y=1, \\ x=2y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=-13, \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-7 \\ y_3=3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-2y=-1, \\ x+2y=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4=-7 \\ y_4=-3 \end{cases}$

Ответ: (7;-3), (7;3), (-7;3), (-7;-3).

4) Домашнее задание.

Примеры. Решить уравнение в целых числах:

а) $x^2 - y^2 = 4$

(x - y)(x + y)=4

$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$
2x = 4	2x = 5	2x = 5
x = 2	x = 5/2	x = 5/2
y = 0	не подходит	не подходит
$\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=-1 \end{cases}$
2x = -4	не подходит	не подходит
x = -2		
y = 0		

Ответ: (-2;0), (2;0).

б) $x^2 + xy = 10$

Ответы: (-10;9), (-5;3), (-2;-3), (-1;-9), (1;9), (2;3), (5;-3), (10;-9).

в) $(x+y)(y-1) = 4$

Ответ: (2;-3), (-1;-1), (-4;0), (2;2), (-1;3), (-4;5).

Итоги. Что значит решить уравнение в целых числах?

Какие методы решения неопределенных уравнений вы знаете?

Приложение:

Упражнения для тренировки.

1) Решите в целых числах.

а) 8x + 12y = 32	x = 1 + 3n, y = 2 - 2n, n €Z
б) 7x + 5y = 29	x = 2 + 5n, y = 3 – 7n, n €Z
в) 4x + 7y = 75	x = 3 + 7n, y = 9 – 4n, n €Z
г) 9x – 2y = 1	x = 1 – 2m, y = 4 + 9m, m €Z
д) 9x – 11y = 36	x = 4 + 11n, y = 9n, n €Z
е) 7x – 4y = 29	x = 3 + 4n, y = -2 + 7n, n €Z
ж) 19x – 5y = 119	x = 1 + 5p, y = -20 + 19p, p €Z
з) 28x – 40y = 60	x = 45 + 10t, y = 30 + 7t, t €Z

2) Найти целые неотрицательные решения уравнения:

а) 8x + 65y = 81 x = 2, y = 1

б) 17x + 23y = 183 x = 4, y = 5

3) Найти все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие следующим условиям

а) x + y = xy (0;0), (2;2)

б) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$ (1;2), (5;2), (-1;-1), (-5;-2)

Решение:

$x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 = 3$

$(x-y)^2 - y(x-y) = 3$

$(x-y)(x-2y) = 3$

Число 3 можно разложить на множители:

3 = 1·3 = 3·1 = (-1)·(-3) = (-3)·(-1)

а) $\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=3 \\ x-2y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=-3 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ x=-5 \end{cases}$

Ответ: (-1; -2), (5; 2), (1;2), (-5; -2).

в) $x^3 + 23 = y^2$ (11;12), (-11;-12), (-11;12), (11;-12)

г) $x^2 - 48 = y^2$ (24;23), (24;-23), (-24;-23), (-24;23)

д) $x(y^2 + 1) = 48$ (48;0), (24;1), (24;-1)

е) $y = \frac{2}{3}x$ x = 3m; y = 2m, m€Z

ж) *y = 2x – 1* x = m: y = 2m – 1, m €Z

з) $x^2 = 4y^2$ x = 2m; y = m; x = 2m; y = -m, m €Z

и) $x^2 = 2y^2$ решений нет

4) Решить уравнения в целых числах

а) $(x-y)(x-1) = 4$	(-3;-2), (-1;1), (0;4), (2;-2), (3;1), (5;4)
б) (x - 3)(xy + 5) = 5	(-2;3), (2;-5), (4;0)
в) (y + 1)(xy – 1)=3	(0;-4), (1;-2), (1;2)
г) $x^2 - 2xy - 3y^2 = 5$	(-4;-1), (-2;1), (2;-1), (4;1)
д) $x^2 + 23 = y^2$	(-11;-12), (-11;12), (11;-12), (11;12)
е) $x^2 - 47 = y^2$	(-24;23), (-24;23), (24;-23), (24;23)

5) Решить уравнения в целых числах.

а) $(x+1)^2 + y^2 = 0$ (-1;0)

б) $x^2 - 10x + 25 + y^2 = 0$ (5;0)

в) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5 = 0$ (2;-1)

г) $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$ (2; -1)

Литература.

1) Детская энциклопедия «Педагогика», Москва, 1972 г.
2) Алгебра-8, Н.Я. Виленкин, ВО «Наука», Новосибирск, 1992 г.
3) Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. В.Я. Галкин, Д.Ю. Сычугов. МГУ, ВМК, Москва, 2005г.
4) Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов. Н.П. Косрыкина. «Просвещение», Москва, 1991 г.
5) Алгебра 7, Макарычев Ю.Н., «Просвещение».