Решение уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций

Митрохина Ольга Николаевна

Обращение к данной теме является актуальным по следующим причинам.

Во-первых, в аттестационных работах за курс средней школы и вступительных экзаменах в ВУЗы довольно часто встречаются уравнения, которые надо решать нетрадиционными способами, но ни в одном школьном учебнике нет акцентов на методы их решения.

Во-вторых, при решении этих уравнений не подходит ни один стандартный (известный) алгоритм и учащимся приходится применять более широкий спектр теоретических знаний, проявлять сообразительность и умение рассуждать. Можно добавить, что они просто интересны, а решения некоторых из них необыкновенно красивы.

Ради справедливости надо заметить, что такие задачи не выходят за рамки школьной программы, поскольку могут быть решены школьными методами.

Остановимся на основных свойствах функций, которые можно использовать при решении уравнений и неравенств: использование ОДЗ (области допустимых значений), ограниченность функций, монотонность. В ряде случаев можно использовать четность, периодичность функции, а также производную.

Вспомним, что решить уравнение - это значит, найти все его корни или показать, что их нет. Это полезно помнить, потому что решение целого ряда уравнений сводится к доказательству того, что корней нет.

Уроки по этой теме (3-5 ч) целесообразно проводить в разделе «Повторение», как граничные между темами «Уравнения и неравенства» и «Функции и их графики».

Форма проведения - урок обобщения и закрепления с элементами исследования.

Цель урока – обобщение и закрепление знаний по теме «Уравнения и неравенства»:
-воспитание познавательного интереса к учебному предмету
-формирование умений анализировать, проводить обобщение, переносить знания в новую ситуацию

<u>Урок 1</u>

1.Организационный момент.
2.Актуализация опорных знаний.
Найти рациональные методы решения уравнений:

1) $\sqrt{(15 - x)} + \sqrt{(3-x)} = 6$ (возведение в квадрат)
2) $\log_4 (2x – 1) * \log_4 x - 2 \log_4 (2x – 1) = 0$ (разложение на множители)
3) $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$ (введение вспомогательного угла)
4) $25^x – 6 * 5^x + 5 = 0$ (сведение к квадратному уравнению)
5) $x^3 – 3x + 2 = 0$ (группировка)
6) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x – 2 \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение: деление на старшую степень и сведение к квадратному)
7) $x^4 – 5 x^3 + 8 x^2 – 5x + 1 0$ (симметричные уравнения : деление на x^2, группировка, подстановка $x + 1/x = t$, сведение к квадратному)

<u>Комментарий учителя.</u> 1 этап – учащиеся работают без подсказки учителя и наводящих вопросов; 2 этап – учитель открывает таблицу-подсказку с перечнем возможных методов решения и предлагает установить соответствие между уравнениями и методами решений. Заметим, что уравнение № 8 учащиеся не могут решить известными методами. Учитель наводящими вопросами помогает его решить и переходит к новой теме.

3.Теоретическая часть или Изучение нового материала

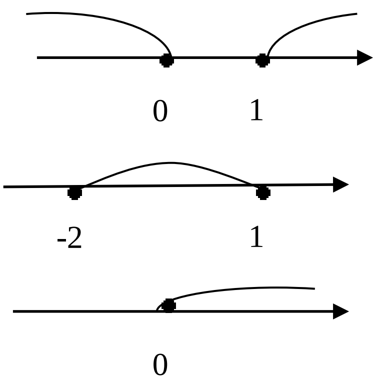
Использование ОДЗ.

Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнений непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Примеры:

1) $\sqrt{(4 - x)} = \log_9 (x - 4)$ ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$ => решений нет.

2) $\sqrt{(x^2 - x)} + \sqrt{(2 - x - x^2)} = \sqrt{x} - 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ 2 - x - x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x (x - 1) \geq 0 \\ (x + 2)(x - 1) \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$



ОДЗ: $x = 0$
$x = 1$

Проверка: $x = 0$ не подходит
$x = 1$ – корень уравнения

3) $\log_5 x < \sqrt{(1 - x^4)}$ ОДЗ : $x > 0$
при $x = 1$ решений нет $-1 \leq x \leq 1$ => $0 < x \leq 1$
при $0 < x < 1$ имеем $\log_5 x < 0$, а $\sqrt{(1 - x^4)} > 0$ => $x \in (0;1)$ – решение
Ответ: $0 < x < 1$.

4) Решение задач.
Доказать, что корней нет.
   a) $\sqrt{(x - 3)} = \sqrt{(2 - x)}$
   b) $\sqrt{(\log_2 x)} = \log_x (1 - x)$
   c) $\sqrt{(\log_2 x)} - \sqrt{(\log_{1/2} x)} = 1$

Решение:
a) $x \geq 3$, $x \leq 2$ => $\varnothing$
b) $\log_2 x \geq 0$ $1 - x > 0$ $x \neq 1$ $x > 0$
$x \geq 1$ $x < 1$ => $\varnothing$
c) $\log_2 x \geq 0$ $\log_{1/2} x \geq 0$ $x > 0$
$x \geq 1$ $x \leq 1$ $x > 0$ => $x = 1$.

Проверка: $x = 1$ – не подходит. Корней нет.

5) Задание на дом :
   1. Составить уравнение, у которого нет корней
   2. $\sqrt{x} + \sqrt{(2 - x)} + \sqrt{(x^2 - 3x)} = \sqrt{2}$ (ответ $x = 0$)
   3. $\sqrt{(3 - x)} + \sqrt{(x - 5)} < 10$ (ответ $\varnothing$)

<u>Урок 2</u>

1) Организационный момент.
2) Устная работа

a) $\sqrt[4]{(1 - x)} + \sqrt[4]{(x - 1)} > 0$ ОДЗ: $x \geq 1$; $x \leq 1 \Rightarrow x = 1$ не подходит, $\varnothing$.
b) $\sqrt{(2 - x)} + \sqrt{(x - 4)} < 1$ $x \leq 2$, $x \geq 4 \Rightarrow \varnothing$
c) $\sqrt{(x + 7)} + \sqrt{(11 - x)} = 6$ $x \geq -7$, $x \leq 11$

Теоретическая часть

3) Базовые неравенства, которые часто используются для оценки.

Нередко при решении задач полезно провести оценку левой и правой частей уравнения или неравенства. Для этого можно воспользоваться следующими базовыми неравенствами :

1. Неравенство Коши для n переменных.

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) / n \geq \sqrt{(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)}$, где $a_1 > 0 \ldots a_n \geq 0$

Для двух переменных $(a+b) / 2 \geq \sqrt{(a * b)}$, где $a, b \geq 0$

(неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим)

2. Оценка суммы двух взаимно обратных чисел.

$a + 1/a \geq 2$, если $a > 0$; $a + 1/a \leq -2$, если $a < 0$; если $a = 1$, то $a + 1/a = 2$.

3. $a^{|f(x)|} \geq 1$, если $a > 1$
$a^{|f(x)|} \leq 1$, если $0 < a < 1$

4. $|\sin f(x)| \leq 1$
$|\cos f(x)| \leq 1$

5. Неравенство Бернулли:

если $p < 0$ или $p > 0$, то $(1 + x)^p \geq 1 + p^x$

если $0 < p < 1$, то $(1 + x) \leq 1 + p^x$, где $x > -1$

Использование ограниченности функций

При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часть играет определяющую роль. Если для всех x из некоторого множества M справедливы $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на множестве M уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Примеры:

1) $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3$

Пусть $f(x) = 2 \sin x$, $|f(x)| \leq 2$

Пусть $g(x) = 5 x^2 + 2x + 3$, $\min g(x) = - b/(2a) = - 2/(2*5) = -1/5$

$g(-1/5) = 5 * (-1/5)^2 + 2 * (-1/5) + 3 = 1/5 - 2/5 + 3 = 14/5 > 2$,

следовательно, левая часть уравнения при любом x строго меньше правой, т.е. решений нет.

2) $\sin (x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$

аналогично $\sin (x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1$, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2$, следовательно, корней нет.

3) $\sqrt{(x^2 + x - 1)} + \sqrt{(x - x^2 + 1)} = x^2 - x + 2$

По неравенству Коши : $(a + b) / 2 > \sqrt{a * b}$ имеем: $\sqrt{(x^2 + x - 1)} = \sqrt{((x^2 + x - 1)*1)} \leq ((x^2 + x - 1) + 1) / 2 = (x^2 + x) / 2$ и $\sqrt{(x - x^2 + 1)} \leq ((x - x^2 + 1) + 1) / 2 = (x - x^2 + 2) / 2$.

Оценим левую часть $\sqrt{\ } + \sqrt{\ } = x^2 - x + 2 \leq (x^2 + x) / 2 + (x - x^2 + 2) / 2 = (2x + 2) / 2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x + 2 \leq x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Проверка : $x = 1$ – корень.

4) Решение задач

a) Решить уравнение

$\sqrt[5]{(1 + \sqrt{(1 - x^2)})} + \sqrt[5]{(1 - \sqrt{(1 - x^2)})} = 2$

Используя неравенство Бернулли получим : $(1 + \sqrt{(1 - x^2)})^{1/5} + (1 - \sqrt{(1 - x^2)})^{1/5} \leq 1 + 1/5 * * \sqrt{(1 - x^2)} + 1 - 1/5 * \sqrt{(1 - x^2)} = 2$, причём равенство возможно лишь при $\sqrt{(1 - x^2)} = 0$, т.е. x = 1 и x = -1. Следовательно, x = +-1 – корни уравнения.

b) $\sqrt{(1 - x)} + \sqrt{(1 + x)} + \sqrt[4]{(1 - x^2)} + \sqrt[4]{(1 + x^2)} = 4$

Используя неравенство Бернулли $(1 - x)^{1/2} + (1 + x)^{1/2} + (1 - x^2)^{1/4} \leq 1 - ½ x + 1 + ½ x + 1 - ¼ x^2 + 1 + ¼ x^2 = 4$. Равенство возможно лишь при x = 0, x = 0 – корень уравнения.

c) $\sqrt{(x - 2)} + \sqrt{(4 - x)} = x^2 - 6x + 11$

Левая часть имеет место при $2 \leq x \leq 4$. Используем неравенство Коши $((a + b) / 2) \geq \sqrt{(a+b)}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$\sqrt{(x - 2)} = \sqrt{1 * (x - 2)} \leq (1 + x - 2) / 2 = (x - 1) / 2$

$\sqrt{(4 - x)} = \sqrt{1 * (4 - x)} \leq (1 + 4 - x)/2 = (5 - x)/2$

$\sqrt{(x - 2} + \sqrt{(4 - x)} \leq (x - 1)/2 + (5 - x)/2 = 2$

Опишем правую часть уравнения.

$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$

Левая часть уравнения меньше или равна 2, а правая часть больше или равна 2. Следовательно, уравнение имеет место, если обе части уравнения равны 2. $x^2 - 6x + 11 = 2$, $x^2 - 6x + 9 = 0$. x = 3. Проверкой убеждаемся, что x =3 – корень уравнения.

d) $\cos x = 1 + x^8$

$-1 \leq \cos x \leq 1$, $1 + x^8 \geq 1$, следовательно, $\cos x = 1 + x^8 = 1$. x = 0. Проверкой убеждаемся, что x = 0 – корень уравнения.

Задание на дом (из [3])

1) $\sin x = x^2 + 2x + 2$
2) $\cos x = x^2 - 2x + 2$
3) $8 \sin x = x^2 - 10 x + 33$
4) $2 \cos x = - x^2 + 12x - 37$
5) $\sin (\pi x/2) = x^2 - 2x +2$
6) $\sin (\pi x/2) = 12 x - 37 - x^2$

Урок 3

1) Организационный момент.
2) Устная работа.
   a. $\sqrt{(x^2 + x + 1)} + (1/ \sqrt{(x^2 + x + 1)}) < 2$ при a > 0 (т.к. $a + 1/a \geq 2$, то ∅)
   b. $\cos x = 1 + |x|$ ($|\cos x| \leq 1$, $1 + |x| \geq 1$, $\cos x = 1 + |x| = 1$, x = 0)
   c. $\sin x = 1 + 1/ (x^2 + 1)$ (∅, т.к. $|\sin x| \leq 1$, $1 + 1/ (x^2 + 1) > 1$)
   d. $\cos x = x^2 + 1$ (x = 0, т.к. $|\cos x| \leq 1$, $x^2 + 1 \geq 1$, $\cos x = x^2 + 1 = 1$)
   e. $\sin x = 1 + 2^x$ ($|\sin x | \leq 1$, $1 + 2^x > 1$, решений нет)
   f. $2^x = 6 - x$ (подбором x = 2)

Комментарий учителя. В последнем уравнении учащиеся подбором могут найти корень уравнения. Необходимо обратить их внимание на то, что этого недостаточно и надо доказать, что других корней нет. Для этого рассмотрим свойство монотонности функции.

3) Теоретическая часть.

При решении уравнений и неравенств с использованием свойства монотонности полезно использовать следующие утверждения:

1. Пусть f(x) – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке J, тогда и уравнение f(x) = C, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке J.
2. Пусть f(x) и g(x) – непрерывные на промежутке J функции, f(x) строго возрастает, а g(x) строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение f(x) = g(x) может иметь не более одного решения на промежутке J.

Примеры:

a) $2^x + 3^x = 5^x$

$(2/5)^x + (3/5)^x = 1.$

Уравнение имеет единственное решение $x = 1$, поскольку его левая часть – убывающая функция.

b) $6^x - 2^x = 32$

$3^x – 1 = 32/ 2^x$

Левая часть полученного уравнения является возрастающей функцией, а правая часть – убывающей. Следовательно, $x = 2$ – единственный корень уравнения.

c) $7^x + 9^x + 22^x < 3$

Пусть $f(x) = 7^x + 9^x + 22^x$. $f(x)$ является возрастающей функцией как сумма трёх возрастающих функций на всей оси.

при $x = 0$ $f(x) = 3$

при $x > 0$ $f(x) > 3$

при $x < 0$ $f(x) < 3$. Следовательно, решениями неравенства являются все $x < 0$.

4) Решение задач (из [3])
   a) $8^x – 18^x = 2 * 27^x$
   b) $x^3 + 33 = -2x$
   c) $x^5 + 2x^3 = 48$
   d) $x^5 + 4x = -40$

5) Задание на дом. Решить уравнения:
   1. $2^x + x = 3$
   2. $2^x = 6 – x$
   3. $2^{x+1} + x = - 3/2$
   4. $2^x = - ½ - x$

Заметим также, что рассмотренные нами методы применяются при решении сложных задач ЕГЭ.

Пример 1. (ЕГЭ-2013, задача 15). Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_7^2\left(x^2+4x-20\right) \le x-3, \\ \log_7^2\left(x^2+2x-14\right) \le 3-x. \end{cases}$$

Решение. Так как из первого неравенства имеем $x-3 \ge A^2 \ge 0$, а из второго имеем $3-x \ge B^2 \ge 0$, то одновременно должны выполняться неравенства $x \ge 3$, и $x \le 3$, значит, единственным решением системы может быть $x = 3$. Подставляя $x = 3$ в исходную систему, убеждаемся в справедливости обоих неравенств, так как $\log_7 1 = 0$.

Ответ: 3.

Пример 2. (ЕГЭ-2013, задача 15). Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4\log_9\left(x+4{,}5\right)-1 \ge 3^{4x^2-9}, \\ 2-4\log_9\left(x+4{,}5\right) \ge 3^{9-4x^2}. \end{cases}$$

Решение. Складывая левые части неравенств и правые части неравенств, получаем: $2 \ge 3^{4x^2-9}+3^{9-4x^2}$. Пусть $3^{4x^2-9}=z>0$, тогда $3^{9-4x^2} = \frac{1}{z} > 0$ и неравенство принимает следующий вид: $z+\frac{1}{z} \le 2$, откуда из неравенства Коши выводим, что $z=1$, значит, $3^{4x^2-9}=1=3^0$., откуда в силу монотонности функции $y=3^x$ следует, что $4x^2-9=0$. Таким образом, либо $x=1{,}5$, либо $x=-1{,}5$. Подставляя эти значения в исходную систему, убеждаемся в том, что $x=1{,}5$ решением системы является, а $x=-1{,}5$ нет.

Ответ: -1,5.

Комментарий учителя.

Итоги: если после изучения этой темы вы, получив задание, не начнёте действовать механически, а хотя бы на минутку задумаетесь, искать ли ОДЗ, использовать ли свойства функции, то можно считать, что эти уроки были не напрасны.